Ministerio de Educación
Cultura, Ciencia y Tecnología
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional La Plata

Departamento de Ciencias Básicas
Unidad Docente Básica Física
Laboratorio de Física
Cátedra: Física I

Cálculo de Incertezas-Propagación

El trabajo de laboratorio en Física, tiene por objeto la medición de magnitudes. Medir una magnitud Física es asociar un número y una dimensión que depende de una unidad que arbitrariamente se eligió, por ejemplo, medir un peso es determinar el número de veces que la unidad de peso elegida está contenida en el peso que queremos hallar. El resultado final de todo trabajo de laboratorio deberá ser entonces un número y una dimensión, es decir, una unidad.

Nunca debe omitirse la unidad en que se está midiendo dado que de ella depende el valor que asociamos a la magnitud en medición.

Sin embargo, con solo dar un número dimensionado, el resultado del trabajo no está completo, si no indicamos de alguna manera el "grado de confianza" que debemos tener en ese número. Esto es absolutamente necesario porque no existen ni pueden existir instrumentos que permiten medir exactamente, es decir, sin error una magnitud. Todo aparato de medición, como obra humana que es imperfecto, **está afectado de error**, difiere siempre algo del valor verdadero de la magnitud que se mide, cualquiera sea el significado que queremos darle a ese hipotético valor verdadero. Apreciar el grado de confianza que podemos tener en una medición es el objeto de cálculo de errores.

1. Definiciones.

Si X es el valor verdadero desconocido de la magnitud medida y el resultado experimental X', se llama error absoluto a la diferencia de estos valores:

$$\Delta X = X - X' \qquad (00-01)$$

Este error no basta por sí solo para caracterizar la precisión de una medición dado que no es lo mismo equivocarse en 1 cm ($\Delta X = 1$ cm) al medir 1 m que al medir 1 km. Una apreciación mejor es medir el error que cometemos por cada unidad en que medimos la magnitud. Este error se denomina error relativo:

$$e = \frac{\Delta X}{X} \qquad (00-02)$$

Donde X es el valor verdadero de la magnitud. En la práctica, solo se necesitan estimaciones del error. Por otra parte, es imposible hallar error absoluto con las fórmulas dadas, dado que para ello necesitamos X, el valor verdadero, que es siempre desconocido. En el cálculo de errores entonces debemos contentarnos en poder hallar el error en forma aproximada, diciendo que el error en una medición es seguramente menor que cierto número, error máximo, nos colocamos siempre en el caso más desfavorable, pero sin decir cuánto vale exactamente el error. Por ejemplo, si medimos una varilla (Fig. 00-01) con una regla dividido al cm, el extremo de la varilla puede caer entre dos divisiones:

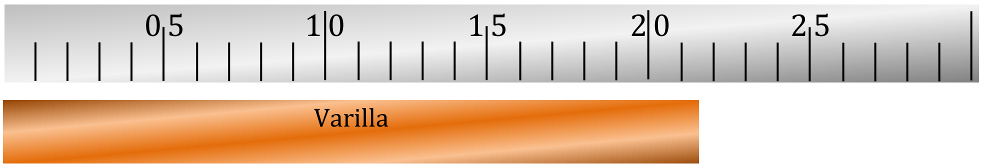


Fig. 00-01

Entonces en vez de tratar de adivinar la posición, diciendo que mide 21,5 cm, decimos que mide $X' = 21{,}5 \pm 0{,}5$ [cm].

El X' es acá 21,5 cm, el valor verdadero no sabemos cuánto es exactamente, pero el error es seguro de 0,05 cm. Podemos entonces reemplazar en (2) el valor verdadero por el resultado de una observación que según (1) difiere muy poco de él. Escribimos entonces el error relativo $\frac{\Delta X}{X'}$.

Sí multiplicó el error relativo por 100, obtendremos el error que cometemos por cada 100 unidades, o sea, el error porcentual:

$$e\% = 100\frac{\Delta X}{X'} \qquad (00-03)$$

El error posible de cometer dependerá entre otros factores que después nombraremos, de la sensibilidad del método de medida, que podemos definir como “la docilidad de respuesta del aparato o del método”, así en la balanza es la desviación producida por un miligramo de sobrecarga. No hay que confundir sensibilidad con precisión, dado que ésta se define como la facultad de un método o de un aparato de repetir en mayor o menor grado los resultados de mediciones de una misma magnitud, realizadas en idénticas condiciones. No existe una relación entre la precisión y la sensibilidad, un instrumento muy sensible no tiene por qué ser muy preciso, en algunos casos, como en la balanza, una gran sensibilidad trae aparejada una disminución de la precisión.

2. Clasificación de los Errores.

Según se originan los errores pueden clasificarse en **sistemáticos** o **casuales**.

a) Errores Sistemáticos:

Son los provenientes de imperfecciones del aparato, del método de medida, de acciones externas, como cambio de temperatura, campo magnético terrestre, etc. Se caracterizan porque para cada caso son prácticamente iguales y del mismo signo, son siempre por exceso o por defecto. Su eliminación, o por lo menos su disminución, en los casos en que puede ser efectuada es bastante difícil. En general los consideráremos despreciables frente a otros errores y en los casos en que sospechamos que no lo sean, introduciremos correcciones en los resultados, por ejemplo, corrección de la longitud de un péndulo, reducción de una pesada al vacío, corrección de la temperatura de un calorímetro por intercambio calórico con el ambiente, etc.

b) Errores Casuales

En todos los casos las mediciones se pueden reducir a observar la posición de un índice sobre una escala. Las escalas se gradúan con las unidades apropiadas y nuestra observación consiste en decir que el índice está más cerca de una división de la escala que de otra. Generalmente, se hace una estimación de cuanto más cerca está, para lo cual se suponen que existen graduaciones más finas, que las de la escala, por ejemplo, cada 0,1 de división en lugar de 0,5.

En un termómetro graduado en °C (grados centígrados), estimar la lectura en décimos de grado, significa imaginar que estas divisiones realmente existen y anotar cerca de cuál de ellas está el índice, en esta estimación va implícito un error. En una escala como la descripta, se tiene un máximo error posible de media división, tal error debe indicarse, por ejemplo, de la manara siguiente:

$t = 29 \pm 0{,}5\ [°C]$

Que indica los límites dentro de los cuales la observación de T puede estar, es decir, que:

$29 - 0{,}5 \leq t \leq 29 + 0{,}5\ [°C]$

La habilidad del observador le permitirá estimar un error menor que el máximo apuntado más arriba.

Un caso especial es el de la medida de intervalos de tiempo con cronómetro de disparador, en que la aguja se mueve efectuando saltos de 1/5 s ó 1/10 s (0,2 s ó 0,1 s), según el cronómetro, introduciendo en toda medida un error de esa magnitud, dado que al apretar el disparador en el momento preciso la aguja ya salto 0,2 s, o sea, mediremos más o apretamos un poco antes tal que la aguja no tuvo tiempo de saltar en el instante deseado, o sea, mediremos 0,2 s de menos, por eso en estos cronómetros vamos a suponer que este error es siempre de 0,2 s dado que en el caso de relojes que miden con precisión de 0,1 s hay que tener en cuenta el “tiempo de reacción” del observador que es de 0,1 s. Veremos en los trabajos que intervienen movimientos periódicos (péndulo o resorte) como se hace para disminuir el error relativo del intervalo que se quiere medir.

Hasta ahora, hemos visto cómo se puede estimar el error que posiblemente cometemos en una determinación pero de aquí no se consigue que el error real de nuestra medición sea igual a ese error posible. Se puede ver esto midiendo una magnitud un cierto número de veces con el mismo instrumento y en las mismas condiciones, se encontrará que los valores difieren entre sí en pequeñas cantidades. Esto se debe a muchísimos factores fuera del control del experimentador estarán influyendo en la determinación, tales como temperatura, presión, movimiento de los soportes, etc. Estos errores no previsibles y de origen prácticamente indeterminados, se denominan errores casuales. Para su estimación es necesario hacer un número más o menos grande de observaciones. La teoría estadística de los errores, de la cual vamos a dar algunas nociones necesarias, se basa se basa en los siguientes postulados fundamentales.

1° El valor medio o promedio aritmético de una serie de observaciones realizadas en iguales condiciones.

$$X = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (00-04)$$

Donde los $x_i(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ son los n valores medidos, x es el valor más probable, es decir, que más se acerca al valor verdadero de la magnitud que se está midiendo.

2° Es igualmente probable cometer errores del mismo valor absoluto y distinto signo, es decir, que en una serie de observaciones, realizadas en idénticas condiciones, hemos cometido diez veces un error de $+0{,}2$ cometeremos aproximadamente diez veces el error $-0{,}2$. Esto ya lo tuvimos en cuenta al considerar el error de una determinación y ponerle el doble signo.

3° En una serie de observaciones los errores de pequeño valor absoluto son los más probables. Por ejemplo si estamos midiendo la longitud de un péndulo con una cinta métrica común, la mayor parte de los resultados deferirá e 1, 2, ó 3 mm, habiendo muy pocos que deferirán en 8 mm y generalmente ninguno que difiere en 15 mm.

Cuando medimos una magnitud varias veces tendremos una serie de valores, ninguno de los cuales será el valor verdadero de la magnitud, pero por el primer postulado de Gauss, el promedio de estos valores se acerca más al valor verdadero que buscamos.

El problema reside entonces en hallar o mejor dicho, en tratar de estimar la diferencia que existe entre el valor verdadero y el promedio de las observaciones, o sea, lo que llamaremos error del valor medio, y lo designamos con E. Una vez hallado E podemos poner:

$$X = \bar{X} \pm E \qquad (00-05)$$

Dado que:

$$E = X \pm \bar{X} \qquad (00-06)$$

Donde x es el valor medio pero ¿cómo vamos a hallar E si no conocemos el valor verdadero de x? Para ello vamos a utilizar un método indirecto, y este es el camino:

Tenemos los n números X y su promedio aritmético:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (00-07)$$

Definimos así otros n números con los cuales con los cuales vamos a formar el llamado error medio cuadrático σ que por definición será:

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)^2} \qquad (00-08)$$

Es decir, la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los errores aparentes dividido por el número de observaciones.

Teniendo σ hemos llegado a nuestro objetivo, dado que, se demuestra haciendo ciertas restricciones que el error del valor medio es:

$$E = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \qquad (00-09)$$

Como el error medio cuadrático no depende del número de observaciones vemos que el error del valor medio disminuye a medida que aumenta n. Haciendo infinitas observaciones su promedio nos deberá dar el valor verdadero dado que E tiende a cero, esto es lo que se llama una ley estadística, pero en la práctica, no podemos realizar infinitas observaciones, sin embargo, la ley es útil dado que permite estimar el error.

Pero hay otras cosas muy importantes en la práctica al hallar E solo hallamos el error debido a imperfecciones casuales en cada medición, pero a su vez cada medición está afectada de errores sistemáticos, de modo que el error verdadero será:

$$x = \bar{x} \pm E \pm error\ sistemático \qquad (00-10)$$

Vimos que E se puede hacer tan pequeño como se quiera con tal de tomar un número grande de mediciones, pero no solo vale la pena hacerlo hasta hacer E despreciable frente a los otros errores.

Por ejemplo, midamos 1.000 veces una magnitud y hallamos que el promedio es de 34,55, con un error sistemático de 0,02 debido al aparato de medida. Luego calculamos E, hallando e_i y σ y obtenemos un valor de $E = 0{,}0008$, que es despreciable frente al error sistemático, por lo tanto no era necesario hacer 1.000 determinaciones, bastaban muchas menos para eliminar la influencia de los errores casuales. Uno de los problemas más importantes del cálculo de errores es hallar un número de observaciones necesaria para que los errores casuales se hagan despreciables frente a los sistemáticos.

3. Medidas Indirectas

Hasta ahora se habló del error en las mediciones directas, es decir, determinación de un peso con una balanza, determinación de una temperatura con un termómetro, etc. Vamos a considerar ahora los errores de las mediciones indirectas que resultan de aplicar una ley física que vincula magnitudes directamente medibles con la magnitud a determinar. Mediciones indirectas son por ejemplo la del calor específico de un cuerpo y la viscosidad de un fluido. En estos casos es necesario considerar como se puede estimar el error posible del resultado final a partir de los errores posibles en cada una de las observaciones.

Las siguientes reglas bastan para los trabajos a realizarse en el primer curso de física.

1° Si las cantidades están sumadas o restadas, el error posible del resultado es la suma de los errores de cada una de dichas cantidades.

Supongamos que en un experimento se observaron las siguientes temperaturas:

$t_i = 11 \pm 0{,}5\ [°C]\ y\ t_f = 28 \pm 0{,}3\ [°C]$

El aumento de temperatura está dado por la diferencia de ambos valores, es decir, 17 °C $\pm$ el error posible, obtenido sumando los errores de cada medición, escribiéndose:

$\Delta t = 17 \pm 0{,}8[°C]$

2° Si las cantidades están multiplicadas o divididas, los errores de las mismas deben ser convertidos en relativos y luego sumados. Por ejemplo si la magnitud L está relacionada con las magnitudes directamente medibles X, Y y Z, de la siguiente manera $L = X\,Y/Z$ el error relativo en esta expresión está dado por:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta X}{X} + \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta Z}{Z} \qquad (00-11)$$

De lo anterior se deduce que elevando una cantidad a la potencia enésima se multiplica su error relativo por n, valiendo esto para índices fraccionarios también, por ejemplo si $L = X\,Y^n/Z^n$ será:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta X}{X} + n\frac{\Delta Y}{Y} + m\frac{\Delta Z}{Z} \qquad (00 - 12)$$

4. Importancia de la Estimación del Error

Mediante la valorización y discusión de los errores antes de la realización de las observaciones, se pueden obtener las ventajas siguientes: medir con mayor cuidado aquellas magnitudes cuyos errores posibles sean mayores, eligiendo en todo caso instrumentos más precisos para medirlas, se tendrá elementos de juicio para diferenciar entre varios métodos cual será el que nos dé menor error, etc., además, obtener el número de cifras significativas con que debe darse un resultado, supongamos que obtenemos el siguiente resultado: $\delta = 29{,}37089$.

El problema es saber qué número de cifras podemos garantizar con nuestra determinación, si el error calculado es 0,02 g/cm^3, podemos garantizar la segunda cifra decimal con un error de $\pm$ 0,02 g/cm^3 y las subsiguientes carecen de sentido y solo se deben a una operación matemática y no a una observación.

Escribiremos entonces: $\delta = 29{,}37 \pm 0{,}02$ [g/cm^3], o sea, el valor verdadero puede ser cualquier número entre 29,35 y 29,39.

Instrumentos de Medición

1. Longitud

1. Cinta métrica:

Fig. 00-02

Fig. 00-02. Tira larga y estrecha de papel, plástico u otro material flexible. Tiene marcada la longitud del metro y sus divisiones y sirve para medir distancias o longitudes, en algunas también en medidas inglesas. $\Delta L = 0{,}001$ m.

2. Reglas graduadas:

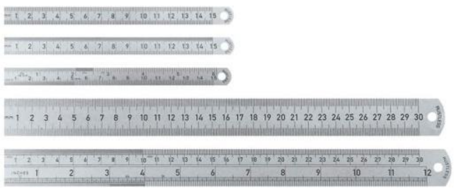


Fig. 00-03

Fig. 00-03. Instrumento de medida con forma de plancha delgada y rectangular que incluye una escala graduada dividida en unidades de longitud, normalmente centímetros y milímetros. Sirve además para trazar segmentos rectilíneos con la ayuda de un bolígrafo o lápiz. Suelen estar fabricadas de madera, metal o plástico. $\Delta L = 1$ mm.

3. Calibre o pie de rey:

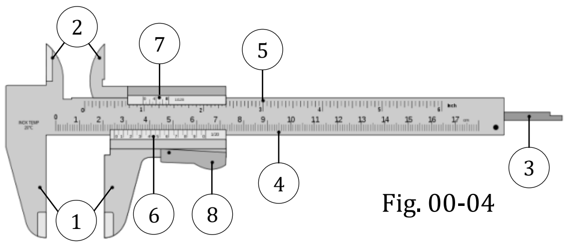


Fig. 00-04

Fig. 00-04. Instrumento utilizado para medir dimensiones de objetos relativamente pequeños, desde centímetros hasta fracciones de milímetros. Es un instrumento sumamente delicado y debe manipularse con habilidad, cuidado y delicadeza, con precaución de no rayarlo ni doblarlo. $\Delta L = 0{,}10$ mm, $\Delta L = 0{,}05$ mm, $\Delta L = 0{,}01$ mm.

Componentes del calibre:

Mordazas para medidas externas.

Mordazas para medidas internas.

Coliza para medida de profundidades.

Escala con divisiones en centímetros y milímetros.

Escala con divisiones en pulgadas y fracciones de pulgada.

Nonio para la lectura de las fracciones de milímetros en que esté dividido.

Nonio para la lectura de las fracciones de pulgada en que esté dividido.

Botón de deslizamiento y freno.

4. Calibre digital:

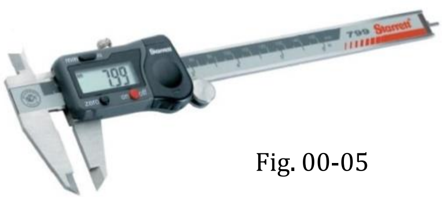


Fig. 00-05

Los calibres digitales (Fig. 00-05) ofrecen en comparación con los modelos convencionales una lectura más simple de los valores de medición. Gracias a la gran pantalla se evitan errores de paralaje. Los calibres digitales no ofrecen una precisión mejorada en la medición, en comparación con los pies nonius. Con lectura directa digital en el display que llevan incorporado.

Los calibres digitales son medidores longitud. Los pies de rey disponen de dos puntas para el control de las mediciones interiores y exteriores. Cuando los calibres digitales tienen un tornillo de sujeción, estos se pueden usar como gálibos ajustables. Esto explica la mezcla de expresiones entre calibre o pie de rey. Como la aplicación principal es la medición, en la formación de profesiones técnicas se prefiere el término pie de rey. Anteriormente, sobre todo en la zona sur de Alemania, también se utilizaba el término "Calibre" (del inglés "calliper"). Las mediciones con los calibres digitales es un procedimiento de medición directo, rápido y preciso, ya que las señales de entrada y salida son idénticas (en este caso la longitud). Los pies de rey tienen algunas ventajas con relación a otros métodos de medición. Para empezar, estos calibres digitales son robustos y de fácil manejo. Pueden efectuar diferentes mediciones de forma rápida en diferentes lugares.

5. Micrómetro o palmer:

El micrómetro (del griego “micros”, pequeño, y “metros”, medición, Fig. 00-06), también llamado Tornillo de Palmer, es un instrumento de medición cuyo funcionamiento está basado en el tornillo micrométrico y que sirve para medir las dimensiones de un objeto con alta precisión, del orden de centésimas de milímetros (($\Delta L = 0{,}01$ mm) y de milésimas de milímetros ($\Delta L = 0{,}001$ mm)

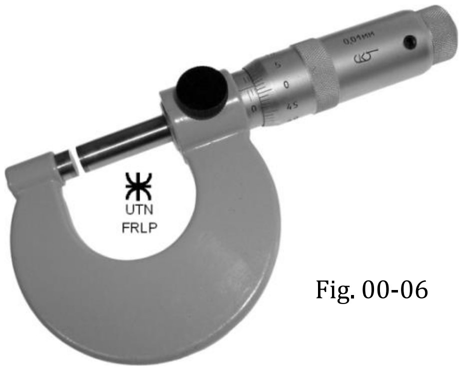


Fig. 00-06

Para ello cuenta con 2 puntas que se aproximan entre sí mediante un tornillo de rosca fina, el cual tiene grabado en su contorno una escala. La escala puede incluir un nonio. La máxima longitud de medida del micrómetro de exteriores es de 25 mm, por lo que es necesario disponer de un micrómetro para cada campo de medidas que se quieran tomar (0-25 mm), (25-50 mm), (50-75 mm), etc.

Frecuentemente el micrómetro también incluye una manera de limitar la torsión máxima del tornillo, dado que la rosca muy fina hace difícil notar fuerzas capaces de causar deterioro de la precisión del instrumento.

6. Micrómetro Digital:

Fig. 00-07. El micrómetro digital es un instrumento portátil para medir longitudes entre sus dos

Fig. 00-07

contactos de medida. El sistema de medida es directo y consta de un cuerpo con un tope fijo y otro móvil provisto de una cabeza micrométrica. La ejecución de la medición da como resultado la longitud de un elemento. El micrómetro digital suele tener un campo de medida de 25 mm aunque existen micrómetros de medidas superiores a 1 metro. $\Delta L = 0{,}01$ mm y $\Delta L = 0{,}001$ mm.

2. Masa y Peso.

1. Dinamómetro:

El dinamómetro (Fig. 00-08) es un instrumento utilizado para medir fuerzas o para calcular el peso de los objetos. El dinamómetro tradicional, inventado por Isaac Newton, basa su funcionamiento en el estiramiento de un resorte que sigue la ley de elasticidad de Hooke en el rango de medición.

Fig. 00-08

Dado que el dinamómetro mide fuerzas, generalmente la fuerza gravitatoria ejercida por el objeto a pesar, y puesto que la aceleración de la gravedad depende del emplazamiento, es necesario calibrar el instrumento cada vez que se cambia de ubicación, especialmente en medidas de precisión.

2. Balanza Mecánicas:

Las balanzas de precisión mecánicas son instrumentos de pesaje cuyo funcionamiento se basa en principios mecánicos y que permiten determinar la masa de un objeto con un $\Delta M = 0{,}1$ g, pudiendo obtener una precisión de 0,0001 g con las balanzas analíticas. Existen varios tipos de balanzas de precisión mecánicas, como balanzas de dos platillos (Fig. 00-09), de un platillo, balanza de cruz o balanza clásica de dos platillos, balanza de Roberval, balanza granataria de un platillo o la balanza analítica mecánica.

Fig. 00-09

3. Balanza digital:

La balanza electrónica (Fig. 00-10), a diferencia de su antecesora, utiliza un sensor para conocer el valor del peso que se deposita. El mismo envía distintas señales eléctricas en función del peso, señales que serán digitalizadas y decodificadas por un pequeño procesador. El valor resultante será mostrado en una

Fig. 00-10

pequeña pantalla LCD. Es por ello que este tipo de elementos necesitan electricidad para su funcionamiento. Si la balanza está calibrada, la exactitud puede ser muy aguda, hecho que hace de este tipo de elementos muy valiosos para distintos ámbitos posibles de trabajo.

Las balanzas digitales, que tiene como unidad de medida el gramo tienen un error relativo de $\Delta M = 0{,}1$ g . Llamadas balanza de precisión es un instrumento utilizado para medir el peso o calcular la masa exacta, ya sea de una persona, un objeto, un producto incontable o una sustancia.

3. Tiempo. Cronómetro.

En el griego. En esta lengua es donde se encuentra el origen etimológico de la palabra que ahora queremos analizar en profundidad: cronómetro. Y es que se encuentra conformada por dos componentes griegos, “Chronos”, que era el nombre que tenía el dios griego del tiempo y “metro”, medida.

Fig. 00-11

Un cronómetro es un reloj de precisión que se emplea para medir fracciones de tiempo muy pequeñas. A diferencia de los relojes convencionales que se utilizan para medir los minutos y las horas que rigen el tiempo cotidiano, los cronómetros suelen usarse en competencias deportivas y en la industria para tener un registro de fracciones temporales más breves, como milésimas de segundo.

Fig. 00-12

La mayoría de los cronómetros permiten medir diversos periodos temporales con idéntico comienzo pero diversos finales. Esto permite registrar tiempos sucesivos, mientras el primer tiempo medido se sigue registrando en un segundo plano.

1. **Cronómetro Analógico.**

Fig. 00-11, $\Delta T = 0{,}2$ s

Fig. 00-12, $\Delta T = 0{,}1$ s

2. **Cronómetro Digital.**

Fig. 00-13, $\Delta T = 0{,}01$ s o $\Delta T = 0{,}001$ s

Fig. 00-13

Ejemplo:

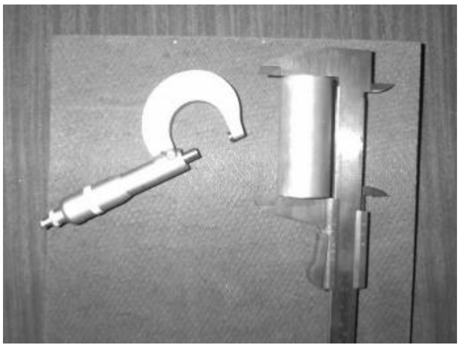
ENSAYO DE LABORATORIO: Volumen de un Cilindro.

1. Objetivos del Ensayo

- Adquirir los fundamentos de las ciencias experimentales o de observación
- Adquirir interés por el método científico y desarrollar actitudes experimentales
- Que el alumno reconozca algunos Instrumentos de Medición.
- Que el alumno adquiera los conceptos básicos de Errores en Mediciones.

2. Equipo a Ensayar:

- Cilindro Metálico



3. Componentes:

- Un cilindro
- Un micrómetro
- Un calibre

4. Procedimiento de Ensayo

a) Estudios de Errores Sistemáticos

Como sabemos, los errores sistemáticos, son debidos casi exclusivamente a los instrumentos y pueden ser eliminados verificando el estado de los mismos antes de comenzar las mediciones.

Debe prestarse especial atención al error de cero especialmente en el caso del micrómetro. En caso de existir este error y que no pueda eliminarse mecánicamente, habrá que corregir cada lectura según lo siguiente:

Sea L_0 la lectura de cero, efectuada al hacer coincidir los topes y L_i la lectura $i - ésima$ efectuada con el micrómetro, si $L_0 > 0$, todas las lecturas efectuadas están aumentadas en L_0 y la lectura corregida L_{iC} resulta:

$$L_{iC} = L_i - L_0$$

Si $L_i < 0$, las lecturas están disminuidas en L_i y la lectura *i*-ésima corregida es:

$$L_{iC} = L_i + L_0$$

Suponiendo corregidos los errores sistemáticos, aplicamos el cálculo de errores a aquellos que se cometen en la lectura de la medición y que denominamos ***casuales***.

El máximo error de esta naturaleza que podemos cometer, está acotado por la aproximación con que cada instrumento de medición fue construido, definiremos como tal a la mínima división que dichos instrumentos permiten apreciar o medir.

En el caso del calibre, esta aproximación es de 0,1 mm y en el micrómetro es generalmente de 0,01 mm.

b) Procedimiento

Se mide varias veces la altura y el diámetro de un cilindro de metal, utilizando el calibre y/o el micrómetro (también llamado palmer). Suponiendo corregidos los errores sistemáticos de acuerdo al procedimiento que más adelante se explica se elaborarán estadísticamente los resultados de la medición obteniendo los valores medidos de la altura y del diámetro. Con estos valores se calcula el volumen del cilindro y su error de propagación.

Si se calcula el volumen del cilindro mediante la fórmula:

$$V = \frac{hD^2\pi}{4} \qquad (00-13)$$

Ahora, buscando los errores relativos para cada término y recordado que los errores relativos se suman, tendremos que:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h} \qquad (00-14)$$

Un simple análisis de esta fórmula, nos dice que las mediciones más precisas deben ser las del diámetro, dado que nuestros cilindros son de diámetro pequeño y, además, su error relativo está multiplicado por 2.

¿Cuál instrumento adoptaremos para medir h?..

¿Cuál instrumento adoptaremos para medir D?..

En la ecuación (00-13), ley de propagación para el volumen, figura el parámetro π, que siendo un número irracional tiene infinitas cifras y debemos saber cuántas tomar para hacer su error despreciable frente a los demás, es decir, debe ser:

$$\frac{\Delta\pi}{\pi} \ll 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta h}{h}$$

Por ejemplo, sí $D = 10$ mm, $\Delta D = 0{,}01$ mm, $h = 50$ mm y $\Delta h = 0{,}1$ mm:

$$\frac{\Delta h}{h} + 2\frac{\Delta D}{D} = \frac{0{,}1}{50} + \frac{0{,}01}{10} = 0{,}003$$

Luego:

$$\frac{\Delta\pi}{\pi} \ll 0{,}003$$

Si tomamos:

$$\begin{cases} \pi = 3{,}1 \rightarrow \Delta\pi < 0{,}042 \rightarrow \dfrac{\Delta\pi}{\pi} < 0{,}014 \\ \pi = 3{,}14 \rightarrow \Delta\pi < 0{,}002 \rightarrow \dfrac{\Delta\pi}{\pi} < 0{,}0006 \\ \pi = 3{,}142 \rightarrow \Delta\pi < 0{,}0005 \rightarrow \dfrac{\Delta\pi}{\pi} < 0{,}0002 \end{cases}$$

Si adoptamos $\pi = 3{,}14$, resulta así su error despreciable frente al 0,003 probable.

Obtenidos los valores medios $\bar{h}$ y $\bar{D}$ y el error del valor medio de cada uno de ellos, Eh y ED, respectivamente, aplicamos la ley de proporción vista al principio, resultando:

$$\frac{EV}{\bar{V}} = 2\frac{ED}{\bar{D}} + \frac{Eh}{\bar{h}} \qquad (00-15)$$

Y tomando

$$\bar{V} = \frac{\pi\bar{D}^2\bar{h}}{4} \qquad (00-16)$$

Obtenemos por la ec. 00-15:

$$EV = \left(2\frac{ED}{\bar{D}} + \frac{Eh}{\bar{h}}\right)\bar{V} \qquad (00-17)$$

Expresión en la que el segundo miembro es conocido, y finalmente:

$$V = \bar{V} \pm EV \qquad (00-18)$$

El conocimiento del cálculo de errores tal como se ha desarrollado, permite, que es lo que habitualmente debe hacerse, prefijar de antemano, el error máximo con que deseamos se determine la medición directa o indirecta que nos proponemos. Fijado este error, se determinan las condiciones de medición y los instrumentos de medida que permiten alcanzar dicho objetivo.

En nuestro caso, suponiendo un cilindro de aproximadamente 20 mm de diámetro y 40 mm de altura, cuyo volumen queremos determinar con un valor relativo no mayor de:

$$\frac{\Delta V}{V} = 0{,}005$$

Tomando la ecuación (00-15) y ya determinado el número de cifras sgnificativas de π.

$$\frac{EV}{\bar{V}} = 2\frac{ED}{\bar{D}} + \frac{Eh}{\bar{h}}$$

Si para medir la altura h utilizábamos el metro, siendo para este instrumento la división mínima, error máximo a cometer, tendíamos:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{40} = 0{,}025 > 0{,}005$$

Razón por la cual se descartó, en cambio con el calibre cuya apreciación es 0,1 mm se verifica:

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{0{,}1}{40} = 0{,}0025 < 0{,}005$$

Que nos permite su utilización por cuanto el error relativo es el 50% menor que el fijado.

Para la determinación de D, despejamos $\frac{\Delta D}{D}$ de la ec. 00-14.

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta V}{V} - \frac{\Delta h}{h}\right) = \frac{1}{2}(0{,}005 - 0{,}0025) = 0{,}00125$$

En este caso si utilizásemos el calibre tendríamos:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{0{,}1}{20} = 0{,}005 > 0{,}00125$$

En consecuencia debe descartarse para medir el diámetro D, recurrimos al micrómetro cuya apreciación, como ya se expuso, es de 0,01 mm resultando:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{0{,}01}{20} = 0{,}0005 < 0{,}00125$$

5. Planilla de Registros de Datos y Eventos de Ensayo:

1. Verificar el estado de los instrumentos, prestando especial atención al error cero. Pedir que el Jefe de Laboratorio corrijan en cada caso.
2. Efectuar 5 (cinco) lecturas del diámetro y la altura del cilindro. Disponer las mediciones en los respectivos cuadros de valores.

i	1	2	3	4	5
h_i[mm]	37,3	37,4	37,4	37,2	37,4
D_i [mm]	18,98	18,99	18,97	18,95	18,96

6. Cálculos, Análisis, Desarrollos, Planillas de Registro de Datos Calculados.

3. Completar las tablas siguientes (los cálculos auxiliares se encuentran a la derecha de la tabla):

			Tabla Altura
i	h_i [mm]	$e_i = \bar{h} - h_i$	$e_i^2 = (\bar{h} - h_i)^2$
1	37,3	0,04	0,002
2	37,4	-0,06	0,004
3	37,4	-0,06	0,004
4	37,2	0,14	0,020
5	37,4	-0,06	0,004
$\sum$	$\sum h_i = 186{,}7$	$\sum e_i = 0{,}000$	$\sum e_i^2 = 0{,}032$
$\bar{h}$	37,34	0	

$$Eh = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n(n-1)}}$$

$$Eh = \pm\sqrt{\frac{0{,}032}{5(5-1)}}$$

$$Eh = \pm 0{,}04\ mm$$

$$h = \bar{h} \pm Eh$$

$$h = 37{,}3 \pm 0{,}1\ [mm]$$

			Tabla Diámetros
i	D_i [mm]	$e_i = \bar{D} - D_i$	$e_i^2 = (\bar{D} - D_i)^2$
1	18,98	-0,00	0,0000
2	18,99	-0,01	0,0001
3	18,97	0,01	0,0001
4	18,99	-0,01	0,0001
5	18,97	0,01	0,0001
$\sum$	$\sum D_i = 94{,}90$	$\sum e_i = 0{,}00$	$\sum e_i^2 = 0{,}0004$
$\bar{D}$	18,98	0	

$$ED = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n(n-1)}}$$

$$ED = \pm\sqrt{\frac{0{,}0004}{5(5-1)}}$$

$$ED = \pm 0{,}00447\ mm$$

$$D = \bar{D} \pm ED$$

$$D = 18{,}97 \pm 0{,}01\ [mm]$$

4. Y para finalizar, adoptamos $\pi = 3{,}14$ para los cálculos de las ec. 00-16.

$$\bar{V} = \frac{\pi \bar{D}^2 \bar{h}}{4} = \frac{3{,}14(18{,}98\ mm)^2(37{,}3\ mm)}{4}$$

$$\bar{V} = 10.548{,}02\ mm^3$$

Donde obtenemos el volumen promedio $\bar{V}$, luego, de la ec. 00-17 el error de volumen EV:

$$EV = \left(2\frac{ED}{\bar{D}} + \frac{Eh}{\bar{h}}\right)\bar{V} = \left(2\frac{0{,}01}{18{,}98} + \frac{0{,}1}{37{,}3}\right)10.548{,}02\ mm^3$$

$$EV = 39{,}39\ mm^3$$

$$V = 10.548{,}02 \pm 39{,}39\ [mm^3]$$

$$V = 10{,}55 \pm 0{,}04\ [cm^3]$$

Nota: Es conveniente expresar el resultado con el número de cifras significativas correspondientes.