Trabajo Práctico Nº 10

Cuerpo Rígido. Segunda condición de equilibrio (Estática del Cuerpo Rígido). Rodadura (Rototraslación).

1 La Fig. 10-01 muestra a un monito de 10 kg que sube por una escalera uniforme de 120 N y 5 m longitud. Los extremos superior e inferior de la escalera descansan sobre superficies sin fricción. El extremo inferior está fijado a la pared mediante una cuerda horizontal que puede soportar una tensión máxima de 110 N.

a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la escalera.

b) Encuentre la tensión en la cuerda cuando el monito ha subido un tercio de la escalera.

c) Encuentre la distancia máxima d que el monito puede subir por la escalera antes de que se rompa la cuerda.

(b) $T = 69{,}8$ N; (c) $d = 4{,}4$ m.

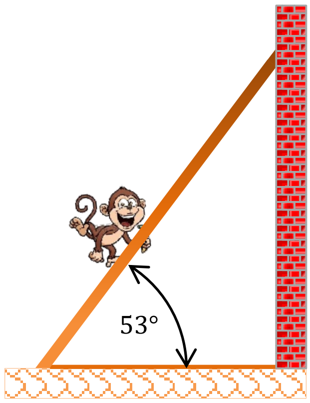


Fig. 10-01

2 Una escalera uniforme (Fig. 10-02) de 6 m de longitud se apoya en una pared vertical lisa, encontrándose su extremo inferior a 3,6 m de la pared. El peso de la escalera es 392 N. y el coeficiente estático de rozamiento entre el pie de la escalera y el suelo, 0,40. Un hombre cuyo peso es 784 N sube lentamente por la escalera.

a) ¿Cuál es la máxima fuerza de rozamiento que el suelo puede ejercer sobre la escalera en su extremo inferior?

b) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento real cuando el hombre ha subido 3 m a lo largo de la escalera?

c) ¿Qué longitud podrá subir antes que la escalera comience a deslizar

(a) $f_{Máx} = 470{,}4$ N; (b) $f_{Est.} = 441$ N; (c) $d = 3{,}3$ m

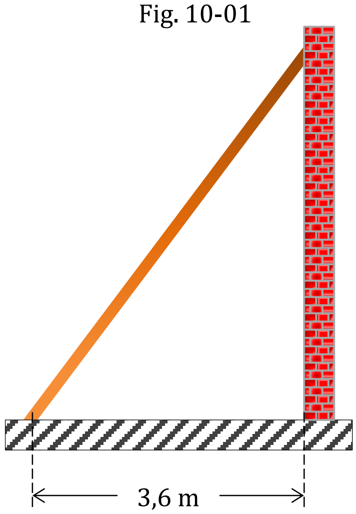
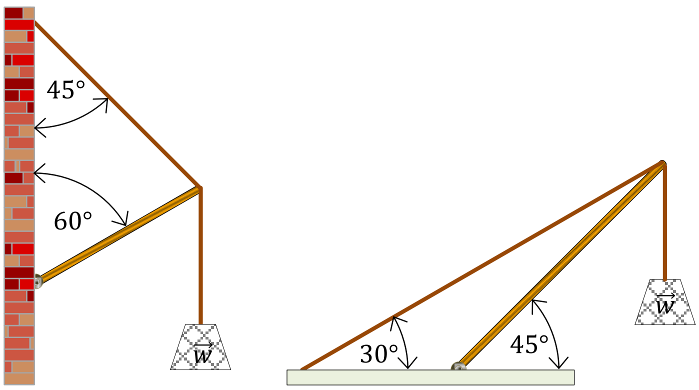


Fig. 10-02

3 Calcúlese la tensión T del cable, y el valor de la fuerza ejercida sobre el puntal por la pared (o por el piso), en los dispositivos esquematizados en las Fig. 10-03, siendo el peso del objeto suspendido 9.800 N, y el peso del puntal 4.900 N.



(a) (b)

Fig. 10-03

Mostramos uno de los métodos de resolución para la Fig. 10-03a. Por tratarse de una estructura, debe de estar en equilibrio de traslación (primera condición de equilibrio) y de rotación (segunda condición de equilibrio), o sea, no debe trasladarse ni rotar.

Para facilitar los cálculos, dividimos el grafico en dos partes, Fig. 10-04 y Fig. 10-05. Sobre el cuerpo (Fig. 10-04) actúan solo dos fuerzas, $\vec{w}$ realizada por la Tierra y $\vec{T}_0$ por el puntal, trasmitiéndose por la cuerda, por lo tanto:

$$\sum F_Y = 0 = T_0 - w = 0$$

$$T_0 = w$$

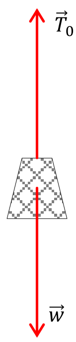


Fig. 10-04

En la Fig. 10-05, las fuerzas que actúan sobre el puntal son su peso $\vec{P}$ realizado por la Tierra (en el centro de gravedad, o sea en el medio), la fuerza que realiza la pared sobre el puntal, $\vec{C}$ (en O) y en el otro extremo del puntal (en A), la fuerza $\vec{T}$, realizada también por la pared y $\vec{T}_0$ por el cuerpo, trasmitiéndose por la cuerda.

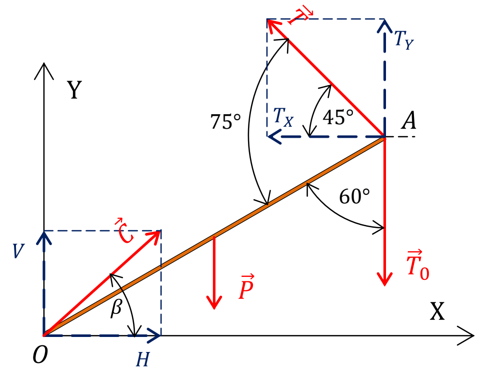


Fig. 10-05

Para este cuerpo, llamando L la longitud del puntal; a $\vec{C}$ la descomponemos en una componente horizontal y otra vertical que llamamos H y V, a $\vec{T}$ en T_X (componente horizontal) y T_Y (componente vertical) (las componentes están dibujadas de color azul y guión largo)

¿Cómo escribimos las ecuaciones siendo fuerzas no concurrentes? La primera condición de equilibrio, $\sum\vec{F} = 0$, tomamos $\sum F_X$ a toda las fuerzas paralelas al eje X, $\sum F_Y$ a toda las fuerzas paralelas al eje Y, como se ve en la Fig. 10-05:

$$\sum F_X = 0 = H - T\cos 45° = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_Y = 0 = V + T\,\mathrm{sen}\,45° - w - P = 0 \qquad (2)$$

Con estas dos ecuaciones decimos que la estructura no se mueve.

Ahora, para escribir el equilibrio de rotación, lo hacemos tomando como eje el lugar donde anulamos la mayor cantidad de fuerzas, para este problema en particular él O, donde está el centro de coordenadas, aplicamos para este problema la definición de producto vectorial para la torca, tomamos sentido positivo del momento anti horario:

$$\sum\tau_O = 0 = L\,T\,\mathrm{sen}\,75° - L\,w\,\mathrm{sen}\,60° - \frac{L}{2}P\,\mathrm{sen}\,60° = 0 \qquad (3)$$

Dado que L se encuentra en todos los términos y la ecuación esta igualada a cero, se cancela, por lo que nos queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

De la ecuación (3) podemos despejar T, ya que es la única incógnita de la ecuación.

$$T = \left(w - \frac{P}{2}\right)\frac{\mathrm{sen}\,60°}{\mathrm{sen}\,75°} = \left(9.800\ \mathrm{N} - \frac{4.900\ \mathrm{N}}{2}\right)\frac{\mathrm{sen}\,60°}{\mathrm{sen}\,75°}$$

$$\boxed{T = 10.983\ \mathrm{N}}$$

Para encontrar el valor de C y su dirección y sentido, de las ecuaciones (1) y (2) se despeja H y V:

$$H = T\cos 45° = 10.983\cos 45°$$

$$H = 7.776\ \mathrm{N}$$

$$V = w + P - T\,\mathrm{sen}\,45° = 10.983\cos 45°$$

$$V = 6.934\ \mathrm{N}$$

Y ahora:

$$C = +\sqrt{H^2 + V^2} = +\sqrt{(7.776\ \mathrm{N})^2 + (6.934\ \mathrm{N})^2}$$

$$\boxed{C = 10.411\ \mathrm{N}}$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{V}{H} = \mathrm{arctg}\frac{6.934\ \mathrm{N}}{7.776\ \mathrm{N}}$$

$$\boxed{\beta = 41°46'}$$

(b) $T = 35.805$ N, $C = 44.993$ N, $\beta = 46°26'$.

4 Un disco circular de 30 cm de diámetro, capaz de girar alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro, tiene una cuerda arrollada alrededor de su borde. La cuerda pasa por una polea sin rozamiento P y está atada a un cuerpo que pesa 235,2 N. Una barra uniforme de 1,20 m de longitud está fija al disco, con un extremo en el centro del mismo. El aparato se halla en equilibrio, con la barra horizontal, como indica la Fig. 10-06.

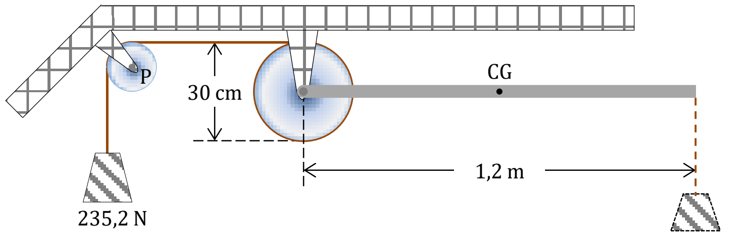


Fig. 10-06

a) ¿Cuál es el peso de la barra?
b) ¿Cuál es su nueva posición de equilibrio cuando se suspende un segundo peso de 19,6 N del extremo exterior de la barra, como se representa por la línea de puntos?
(a) $w = 58{,}8$ N; (b) $\theta = 53°$.

5 Una puerta de 2,40 m de longitud y 1,20 m de anchura pesa 400 N. Su centro de gravedad se encuentra en el centro geométrico, y está suspendida en A y B. Para aliviar el esfuerzo sobre el gozne superior se dispone un, cable CD como indica la Fig. 10-07. Se aumenta la tensión en CD hasta que la fuerza horizontal sobre el gozne A sea nula.
a) ¿Cuál es la tensión en el cable CD?
b) ¿Cuál es el valor de la componente horizontal de la fuerza en el gozne B?
c) ¿Cuál es la fuerza vertical ejercida en conjunto por los goznes A y B?
(a) $T = 214{,}4$ N; (b) $H_B = 185{,}6$N;
(c) $V_A + V_B = 292{,}8$ N.

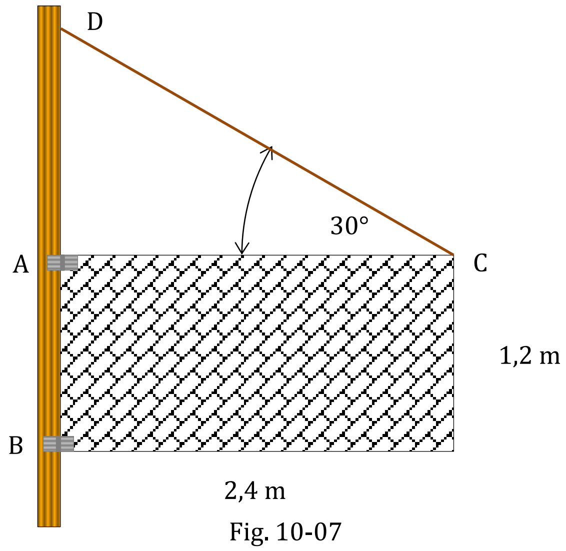


Fig. 10-07

6 Una puerta de 2,1 m de altura y 0,9 m de anchura está colgada de goznes separados 1,80 m entre sí y a 15 cm de los bordes superior e inferior de la puerta. La puerta pesa 300 N, su centro de gravedad coincide con su centro geométrico y cada gozne soporta la mitad del peso de la puerta. Calcúlese la componente horizontal de la fuerza ejercida sobre la puerta en cada gozne.
$H_S = 75$ N hacia la izquierda; $H_I = 75$ N hacia la derecha.

7 Un bloque rectangular de 30 cm de anchura y 60 cm le altura es arrastrado hacia la derecha a velocidad constante sobre una superficie horizontal, mediante una fuerza horizontal $\vec{F}$, como indica la Fig. 10-08. El coeficiente cinético de rozamiento es 0,4, el bloque pesa 245 N y su centro de gravedad coincide con el centro de simetría.
a) Calcúlese la fuerza $\vec{F}$ requerida.
b) Hállese la línea de acción de la fuerza normal $\vec{n}$ ejercida sobre el bloque por la superficie si la altura h es 15 cm.
c) Calcúlese el valor de h para el cual el bloque comienza justamente a voltear.
(a) $F = 98$ N; (b) $x_N = 0{,}09$ m desde la derecha;
(c) $h = 0{,}375$ m.

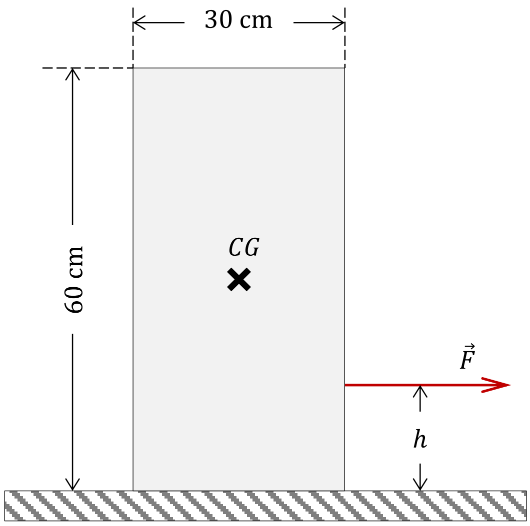


Fig. 10-08

8 Un bloque rectangular homogéneo, de 60 cm de altura y 30 cm de anchura descansa sobre una tabla AB, como muestra la Fig. 10-09. El coeficiente estático de rozamiento entre el bloque y la tabla es 0,40.

a) Si se eleva lentamente el extremo B de la tabla, ¿comenzará el bloque a deslizar hacia abajo antes de volcar? Calcúlese el ángulo θ para el cual comienza a deslizar, o para el que vuelca.

b) ¿Cuál sería la respuesta si el coeficiente estático de rozamiento fuera 0,60?

c) ¿Y si fuera 0,50?

(a) Desliza, $\theta_D = 21°48'$, $\theta_V = 26°34'$;
(b) Vuelca, $\theta_D = 30°58'$, $\theta_V = 26°34'$;
(c) Indiferente, $\theta_D = \theta_V = 26°34'$.

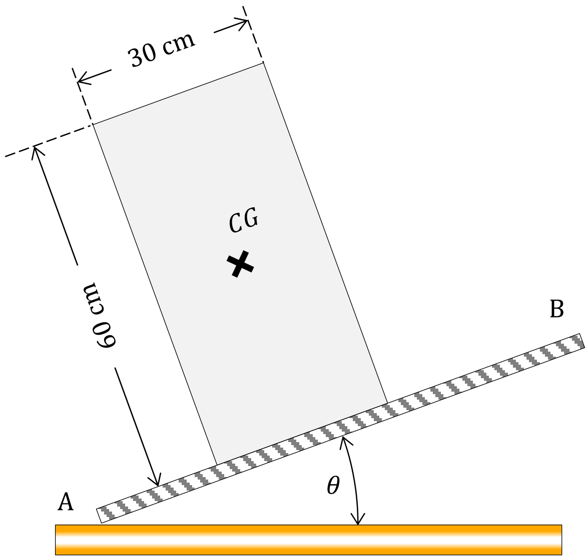


Fig. 10-09

9 Una puerta de garaje está montada sobre un carril aéreo como en la Fig. 10-10. Las ruedas en A y B están enmohecidas, de modo que no ruedan sino que deslizan sobre el carril. El coeficiente cinético de rozamiento es 0,5. La distancia entre las ruedas es 1,20 m, y cada una dista 30 cm de los bordes verticales de la puerta. La puerta, que es simétrica y pesa 784 N, es empujada hacia la izquierda a velocidad constante por una fuerza horizontal $\vec{F}$.

a) Si la distancia h es 90 cm, ¿cuál es la componente vertical de la fuerza ejercida sobre cada rueda por el carril?

b) Hállese el valor máximo que puede alcanzar h sin que ninguna rueda se separe del carril.

(a) $n_A = 98$ N, $n_B = 686$ N; (b) $h = 1{,}20$ m.

10 Un cilindro de 10 kg de masa rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal. En el instante en que su centro de masa tiene una velocidad de 10 m/s, determine:

a) La energía cinética de traslación de su centro de masa.

b) La energía cinética de rotación alrededor de su centro de masa.

c) Su energía total.

(a) $K_T = 500$ J; (b) $K_R = 250$ J; (c) $K_T = 750$ J.

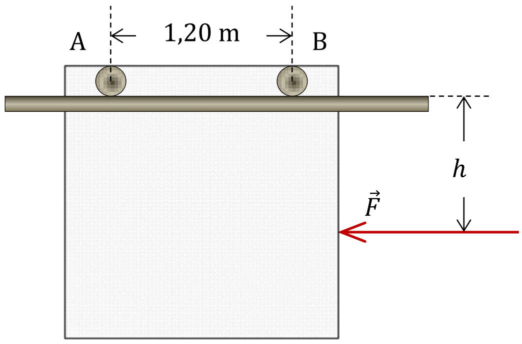


Fig. 10-10

11

a) Determine la aceleración del centro de masa de un disco sólido uniforme que rueda hacia abajo por un plano inclinado y compare esta aceleración con la de un aro uniforme.

b) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción necesario para mantener el movimiento de rodamiento puro del disco?

(a) $a_{CMD} = \dfrac{2}{3} g \operatorname{sen}\theta \left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$, $a_{CMA} = \dfrac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta \left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$, La aceleración del disco es mayor que el Aro;

(b) $\mu = \dfrac{1}{3} \operatorname{tg}\theta$.

12 Una esfera sólida tiene un radio de 0,2 m y una masa de 150 kg. ¿Cuánto trabajo se necesita para lograr que la esfera ruede con una velocidad angular de 50 rad/s sobre una superficie horizontal? (Suponga que la esfera parte del reposo y rueda sin deslizar)

$W = 10.500$ J.

13 Un disco sólido uniforme y un aro uniforme se colocan uno frente al otro en la parte superior de una pendiente de 2,70 m de altura. Si se sueltan ambos desde el reposo y ruedan sin deslizar, determine sus velocidades cuando alcanzan el pie de la pendiente. ¿Qué objeto llega primero a la parte inferior?

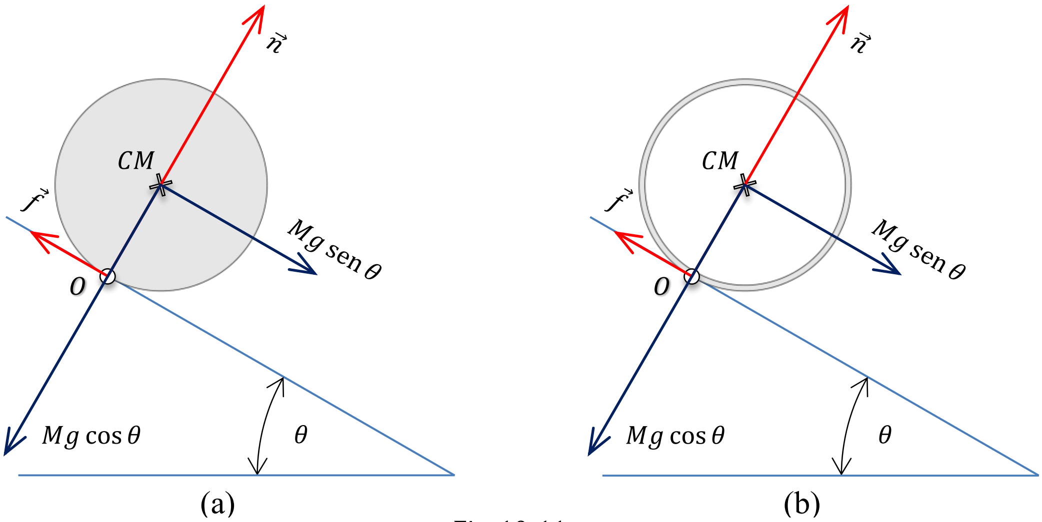


Fig. 10-11

La Fig. 10-11 representa los dos cuerpos trasladándose y rotando (rodadura sin deslizamiento o rototraslación) (a) el disco sólido y (b) aro. Las fuerzas actuantes en los dos cuerpos tienen los mismos valores, no así sus momentos de Inercia. Una forma sencilla de resolución es utilizando conceptos energéticos. Solo actúan fuerzas conservativas, y, la fuerza de fricción no realiza trabajo.
El trabajo de las no conservativas es cero y cambian la energía potencial y cinética total, por lo que escribimos:

$$W_{NC} = 0 = \Delta U + \Delta K_{Total} = \Delta U + \Delta K_{Traslación} + \Delta K_{Rotación} \qquad (1)$$

La energía potencial en la parte más alta es Mgh, y cero en el pie del plano inclinado. En la parte superior del plano inclinado las dos energías cinéticas valen cero por encontrase en reposo y en la parte inferior tendremos:

$$K_{Traslación} + K_{Rotación} = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Y recordando la condición de rodadura sin deslizamiento $v_{CM} = R\omega$ y reemplazando en (1):

$$0 = 0 - Mgh + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 - 0 + \frac{1}{2}I_{CM}\frac{v_{CM}^2}{R^2} - 0$$

Siendo: $I_{CM\,(\text{Disco})} = \dfrac{1}{2}MR^2$ y $I_{CM\,(\text{Aro})} = MR^2$

$$0 = -Mgh + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{v_{CM}^2}{R^2} \qquad \text{(Disco)}$$

$$0 = -gh + \frac{1}{2}v_{CM}^2 + \frac{1}{4}v_{CM}^2$$

$$0 = -gh + \frac{3}{4}v_{CM}^2$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} = \sqrt{\frac{4}{3}\left(9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(2{,}70\ \text{m})}$$

$$\boxed{v_{CM\,(\text{Disco})} = 5{,}95\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$0 = -Mgh + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}MR^2\frac{v_{CM}^2}{R^2} \qquad \text{(Aro)}$$

$$0 = -gh + \frac{1}{2}v_{CM}^2 + \frac{1}{2}v_{CM}^2$$

$$0 = -gh + v_{CM}^2$$

$$v_{CM} = \sqrt{gh} = \sqrt{\left(9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(2{,}70\ \mathrm{m})}$$

$$\boxed{v_{CM\ (\mathrm{Aro})} = 5{,}14\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Por los resultados obtenidos es evidente que el disco llegará primero al pie del plano inclinado.

14 Una bola de billar tiene una masa de 4 kg, un momento de inercia de $1{,}6 \times 10^{-2}$ kg m² y un radio de 0,10 m. Si rueda por la pista sin deslizar a una velocidad lineal de 4 m/s, ¿cuál es su energía total?
$K_T = 44{,}80$ J.

15 Un anillo de hierro cuyos radios miden 0,60 m y 0,50 m, tiene una masa de 18 kg. Rueda sobre un plano inclinado, llegando a la base con una velocidad de 3,60 m/s. Calcular la energía cinética total y la altura vertical de la cual cae.
$K_T = 215{,}46$ J; $h = 1{,}22$ m.

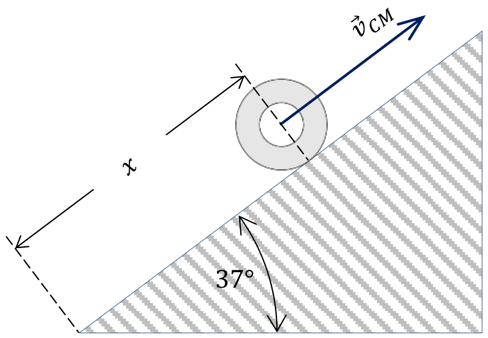


Fig. 10-12

16 Un anillo de 2,4 kg de masa, radio interior de 6 cm y radio exterior de 8 cm sube rodando (sin deslizar) por un plano inclinado que forma un ángulo de $\theta = 37°$ con la horizontal (Fig. 10-12). En el momento en que el anillo ha recorrido una distancia $x = 2$ m al ascender por el plano su velocidad es de 2,8 m/s. El anillo continúa ascendiendo por el plano cierta distancia adicional y después rueda hacia abajo. Suponiendo que el plano es lo suficientemente largo de manera que el anillo no ruede fuera en la parte superior, ¿qué tan arriba puede llegar?
$d = 1{,}19$ m más, $x_{Total} = 3{,}19$ m.

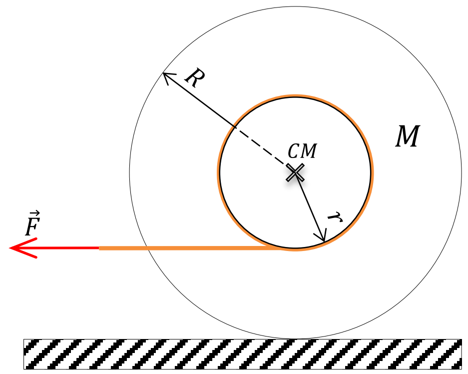
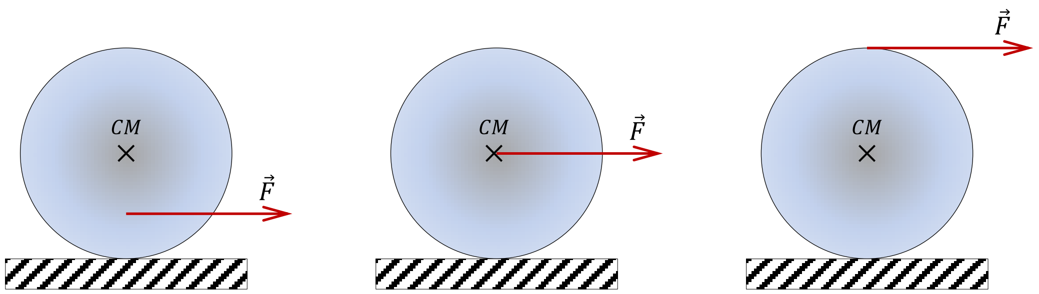


Fig. 10-13

17 Una rueda está enrollada alrededor del pequeño cilindro de la Fig. 10-13. Suponiendo que tiramos con una fuerza $\vec{F}$, calcular la aceleración del cilindro. Determinar el sentido del movimiento. $R = 5$ cm, $r = 3$ cm, $F = 0{,}98$ N y $m = 1$ kg.
$a = 0{,}26$ m/s², hacia la izquierda.

18 Un cilindro uniforme (Fig. 10-14) de masa 1 kg, rueda sin deslizar bajo la influencia de una fuerza horizontal de 3 N. Calcular la aceleración del centro de masa del cilindro y la fuerza de fricción que la superficie ejerce sobre el cilindro, si la fuerza está aplicada en:
a) En el punto medio del cilindro, entre el eje y la superficie(1/2 del radio)
b) En el centro del cilindro
c) En la parte superior del cilindro [(1)].



(a) (b) (c)
Fig. 10-14

(1) Necesario para la resolución del problema 21.

(a) a_{CM} =1 m/s² hacia la derecha, $f = 2$ N hacia la izquierda;
(b) a_{CM} =2 m/s² hacia la derecha, $f = 1$ N hacia la izquierda;
(c) a_{CM} =4 m/s² hacia la derecha, $f = 1$ N hacia la derecha

19 Un carretón tiene cuatro ruedas discoidales de 60 cm de radio, cada una de las cuales tiene una masa de 10 kg, la masa del vehículo es de 100 kg, y su centro de masa coincide con el centro geométrico, según muestra la Fig. 10-15. Sobre el carretón, que está inicialmente en reposo, comienza a actuar una fuerza constante horizontal $\vec{F}$, cuya línea de acción pasa por el centro de masa. El desplazamiento en 3 s es de 10,8 m.

a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza necesaria $\vec{F}$, si la superficie no tiene rozamiento?

b) ¿Qué fuerza $\vec{F}$ se precisará si el coeficiente de rozamiento es justamente el necesario para que no se produzca el deslizamiento?

(a) $F = 336$ N; (b) $F = 384$ N.

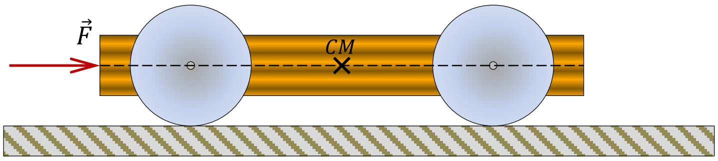


Fig. 10-15

20 Una bola uniforme, de radio r, rueda sin deslizar sin despegarse de la pista vertical de 1 m de radio de la Fig. 10-16. Si la bola es abandonada en la parte más alta de la pista:

a) ¿Cuál será el valor mínimo de h para que eso suceda?

b) ¿Cuánto valen la aceleración del CM el punto B?

c) ¿Cuánto valen las aceleraciones normal y tangencial de la bola, cuando ésta se encuentra en el punto B?

(a) $h = 2{,}70$ m; (b) $a_{CM} = 7$ m/s²;
(c) $a_N = 23{,}80$ m/s², $a_T = 14$ m/s².

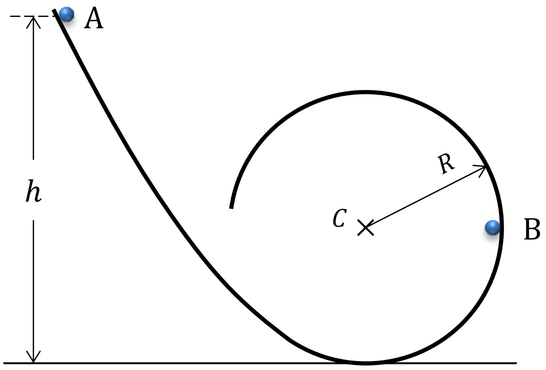


Fig. 10-16

21 En el sistema representado en la Fig. 10-17, la masa M del cilindro es de 1 kg, y $R = 0{,}20$ m, la masa m del cuerpo suspendido de 0,2 kg.

a) Calcular la aceleración lineal de la masa m.

b) La aceleración angular del cilindro M.

c) La tensión en la cuerda.

d) La aceleración del CM del cilindro.

(a) $a = 3{,}40$ m/s²; (b) $\alpha = 8{,}5$ rad/s²;
(c) $T = 1{,}275$ N.; (d) $a_{CM} = 1{,}70$ m/s².

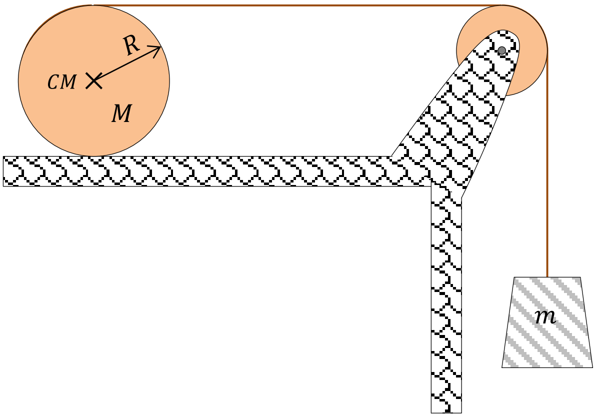


Fig. 10-17